

کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۷/۱۳

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: حسابان یازدهم

پژوهندگان علم



۱- در یک دنباله هندسی صعودی سه مقدار، «جمله دوم»، «دو برابر جمله پنجم» و «جمله هشتم» می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند؛ در بین این سه عدد بزرگ‌ترین مقدار چند برابر کوچک‌ترین مقدار است؟

$2 + \sqrt{3}$ (۱) $5 + 2\sqrt{3}$ (۲) $5 + 4\sqrt{3}$ (۳) $7 + 4\sqrt{3}$ (۴)

۲- اعداد $2^a, 2^b, 4\sqrt{2}$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

2.5 (۱) 2 (۲) 1.5 (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

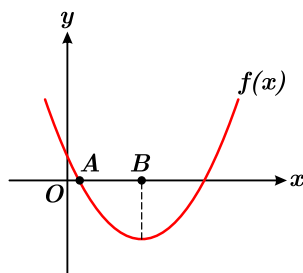
۳- تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 2 (۳) 3 (۴)

۴- مجموع n جمله ابتدایی از یک دنباله حسابی برابر با $S_n = 2n^2 + n$ است. حاصل $a_{30}^2 - a_{29}^2 + a_{28}^2 - a_{27}^2 + \dots + a_2^2 - a_1^2$ کدام است؟

21600 (۱) 5490 (۲) 2745 (۳) 7320 (۴)

۵- نمودار سهمی $f(x) = x^2 - 12x + m + 8$ به صورت زیر داده شده است، اگر $|AB| = 2|OA|$ باشد، مقدار m کدام است؟
 O مبدا مختصات است.



8 (۱) 6 (۲) 18 (۳) 12 (۴)

۶- مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۷، کدام است؟

721 (۱) 728 (۲) 735 (۳) 742 (۴)

۷- اگر مجموع ۶ جمله اول یک دنباله حسابی با مجموع ۱۰ جمله اول آن برابر باشد، آنگاه مجموع ۱۶ جمله اول این دنباله کدام است؟

0 (۱) 10 (۲) 6 (۳) 18 (۴)

۸- مضارب طبیعی عدد ۴ را با ترتیب صعودی به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعداد هر دسته با شماره آن دسته برابر باشد. مجموع اعداد دسته پانزدهم کدام است؟

$\{4\}, \{8, 12\}, \{16, 20, 24\}, \dots$

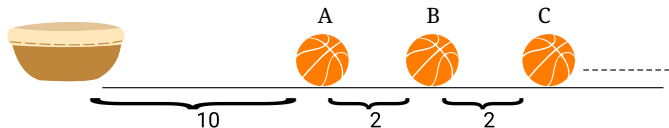
6780 (۱) 6680 (۲) 7680 (۳) 7780 (۴)

۹- در یک دنباله حسابی جملات سوم و هفتم، به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. مجموع جملات دهم و بیستم این دنباله کدام است؟

246 (۱) 256 (۲) 266 (۳) 276 (۴)



۱۰- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۲ متر از هم قرار دارند (مطابق شکل). فاصله‌ی توپ اول از سبد ۱۰ متر است. اگر دونه ابتدا کنار توپ A باشد و توپ را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و ببرد به داخل سبد بیندازد و همین کار را ادامه دهد. این دونه با انداختن چند توپ در سبد، مسافتی ۷۱۰ متری را دویده است؟



۱۲ (۱)

۱۳ (۲)

۱۴ (۳)

۱۵ (۴)

۱۱- صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۱۲- حاصل $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{n \text{ رقم}}$ به‌ازای $n = 19$ کدام است؟

$$\frac{1}{9}(10^{21} - 181) \quad (۴)$$

$$\frac{1}{9}(10^{20} - 181) \quad (۳)$$

$$10^{21} \quad (۲)$$

$$10^{20} \quad (۱)$$

۱۳- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد، آن‌گاه مجموع معکوس جملات این دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{a_n^2}{S_n} \quad (۴)$$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{S_n} \quad (۳)$$

$$\frac{S_n}{a_1 a_n} \quad (۲)$$

$$\frac{S_n}{a_n} \quad (۱)$$

۱۴- دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{2}, x, \frac{1}{3}, \dots$ نزولی و دنباله‌ی هندسی $a, 9, b, \dots$ صعودی است؛ مجموع ۶ جمله‌ی اول از دنباله‌ی دوم چند برابر مجموع ۶ جمله‌ی اول از دنباله‌ی اول است؟

$$21 \frac{1}{7} \quad (۴)$$

$$63 \frac{1}{7} \quad (۳)$$

$$21 \frac{1}{9} \quad (۲)$$

$$67 \frac{1}{7} \quad (۱)$$

۱۵- مقدار x از معادله‌ی $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$ کدام است؟

$$39 \quad (۴)$$

$$37 \quad (۳)$$

$$41 \quad (۲)$$

$$43 \quad (۱)$$

۱۶- اگر $1 + 2 + 3 + \dots + n = 5050$ باشد، n کدام است؟

$$n = 100 \quad (۴)$$

$$\text{هیچ‌گاه} \quad (۳)$$

$$n = 99 \quad (۲)$$

$$n = 101 \quad (۱)$$

۱۷- به‌ازای چند مقدار صحیح m معادله‌ی $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + m^2 - 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است؟

$$3 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۱۸- در یک دنباله هندسی با قدر نسبت q و تعداد جملات زوج، مجموع جملات ردیف فرد S است. مجموع جملات دنباله کدام است؟

$$(1+q)S \quad (۴)$$

$$qS \quad (۳)$$

$$qS^2 \quad (۲)$$

$$2S \quad (۱)$$

۱۹- مجموع تمام اعداد حسابی بین ۱۱۳ تا ۷۱۶ که بر ۶ بخش‌پذیرند، کدام است؟

$$4181 \quad (۴)$$

$$41814 \quad (۳)$$

$$41841 \quad (۲)$$

$$41418 \quad (۱)$$



۲۰- در ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف زوج سه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. نسبت جمله اول به قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ -4 ④ -5

۲۱- در یک دنباله هندسی با جملات متمایز و غیرافزایشی، اگر مجموع ۴ جمله دوم، ۹ برابر مجموع ۴ جمله اول باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟ (جمله اول دنباله مثبت است.)

- ① $-\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۲- اگر در یک دنباله حسابی، جمله ی هفتم ۵ برابر جمله ی سوم باشد، حاصل $\frac{a_5}{a_3}$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۵

۲۳- در یک دنباله حسابی بین جملات رابطه ی $8 = 2a_1 + 3a_2 - 5a_3$ برقرار است. حاصل $5a_1 - 3a_2 - 2a_3$ کدام است؟

- ① -8 ② $-\frac{8}{7}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ ۸

۲۴- در دنباله ی حسابی $0, -21, x, -27$ مجموع جملات منفی کدام است؟

- ① -135 ② -150 ③ -75 ④ -270

۲۵- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۱۲، مجموع سه جمله آخر ۶۶ و مجموع تمام جملات ۱۱۷ می باشد. تعداد جملات دنباله کدام است؟

- ① ۸ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱۳

۲۶- اگر $x = \frac{1-a}{a}$ ریشه غیرصفر معادله $0 = x^2 + (3a+1)x + a - 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ① -2 ② ۲ ③ $\frac{1}{2}$ ④ -1

۲۷- اگر $1, 5x+1, x+5, 2x-1$ سه جمله اول یک دنباله حسابی باشند، اولین جمله ی ۳ رقمی آن کدام است؟

- ① ۱۰۲ ② ۱۰۳ ③ ۱۰۴ ④ ۱۰۵

۲۸- اگر در یک دنباله ی هندسی نزولی مجموع ۴ جمله اول برابر ۱۶ و مجموع ۸ جمله اول آن ۱۷ باشد. قدرنسبت کدام است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{+1}{2}$ ③ $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{+\sqrt{2}}{2}$

۲۹- جمله n ام دنباله ای $(5n-1)$ و جمله $(3n+1)$ ام آن $15n+x$ است. مقدار x کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۰- در یک دنباله ی هندسی جمله $(k+1)$ ام برابر p است. حاصلضرب $(2k+1)$ جمله ی اولیه ی این دنباله چقدر است؟

- ① p^{2k-1} ② p^{2k+1} ③ p^{2k} ④ p^{k+1}

۳۱- حاصل $x^{15} + x^{10} + x^5 + x + x^3 + x^2$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ① $512\sqrt{2}$ ② $511\sqrt{2}$ ③ $256\sqrt{2}$ ④ $255\sqrt{2}$



۳۲- حداقل چند جمله اول از دنباله $a_n = \frac{3^{n-2}}{4}$ را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۱ بیش‌تر شود؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۳۳- در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و یازدهم برابر با ۱۰ است. مجموع سیزده جمله اول این دنباله کدام است؟

- ① ۵۲ ② ۶۵ ③ ۷۸ ④ ۹۱

۳۴- در یک دنباله حسابی $S_n = 3n^2 - 13n$ می‌باشد (S_n مجموع n جمله اول دنباله است). حاصل $a_{24} + a_{18}$ کدام است؟

- ① ۲۱۶ ② ۲۲۰ ③ ۲۳۰ ④ ۲۳۲

۳۵- در یک دنباله هندسی، مجموع چهار جمله اول دنباله ۱۶ برابر مجموع ۴ جمله بعدی آن است. مقادیر قابل قبول برای قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ① ± 4 ② ± 2 ③ $\pm \frac{1}{2}$ ④ $\pm \frac{1}{4}$

۳۶- در یک دنباله هندسی مجموع نوزده جمله اول ۶۴۰ واحد از مجموع ده جمله اول همان دنباله بیشتر است. اگر قدر نسبت دنباله ۲ باشد. آن‌گاه مجموع ۹ جمله اول کدام است؟

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$

۳۷- طول یک نوع کاشی دو سانتی‌متر بلندتر از سه برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۲۴ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

- ① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۲۴ ④ ۲۷

۳۸- در یک دنباله حسابی متناهی، مجموع دو جمله اول برابر ۲۰ و مجموع دو جمله آخر برابر ۴۰ است. اگر مجموع جملات این دنباله برابر ۶۰۰ باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

- ① ۲۰ ② ۳۰ ③ ۴۰ ④ ۵۰

۳۹- جملات سوم، هفتم و دهم دنباله حسابی $a_n = a + 2n$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند. جمله اول دنباله حسابی کدام است؟

- ① -۳۸ ② -۳۶ ③ -۳۲ ④ -۲۶

۴۰- بین دو عدد $\frac{1}{2}$ و ۴، پنج واسطه هندسی می‌نویسیم، جمله پنجم این دنباله کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② ۱ ③ $\sqrt{2}$ ④ ۲

۴۱- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، مجموع جملات سوم و چهارم $\frac{4}{5}$ برابر مجموع جملات پنجم و ششم است. اگر جمله دوم دنباله برابر ۲ باشد، جمله اول این دنباله چقدر است؟

- ① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ ۳

۴۲- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

- ① اگر جملات یک دنباله هندسی را به توان ۲ برسانیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.
 ② اگر جملات یک دنباله هندسی را در عددی ضرب کنیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.
 ③ اگر جملات یک دنباله هندسی را با عدد ثابتی مخالف صفر جمع کنیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.
 ④ اگر قدر نسبت یک دنباله هندسی را با عدد ثابتی جمع کنیم، دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.



۴۳- دنباله‌ی هندسی $1, b, a, 4$ غیر نزولی است. مجموع چند جمله‌ی اول آن برابر $\frac{21}{8}$ است؟

- ① ۶ ② ۷ ③ ۸ ④ ۹

۴۴- در یک دنباله‌ی حسابی $\frac{S_7}{S_3} = \frac{49}{9}$ ، مقدار $\frac{a_7}{a_3}$ کدام است؟

- ① $\frac{16}{5}$ ② ۳ ③ $\frac{14}{5}$ ④ $\frac{13}{5}$

۴۵- کدام جمله از دنباله‌ی حسابی $104, -91, -78, \dots$ برابر صفر است؟

- ① هفتم ② نهم ③ پنجم ④ یازدهم

۴۶- ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر، دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ می‌باشد؟

- ① $x^2 - 3x + 2 = 0$ ② $x^2 - 6x + 4 = 0$ ③ $x^2 - 6x + 8 = 0$ ④ $x^2 - 10x + 16 = 0$

۴۷- اگر $S_n = (p+2)n^2 + (3p-p^2)n^2 + 2n$ ، مجموع n جمله‌ی اول از دنباله‌ی حسابی باشد، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ① -۲ ② ۲ ③ -۴ ④ ۴

۴۸- جمله‌ی عمومی یک دنباله بصورت $a_n = 2^{n-1}$ می‌باشد، چند جمله از این دنباله را باهم جمع کنیم تا مجموع ۲۵۵ شود؟

- ① ۶ ② ۷ ③ ۸ ④ ۹

۴۹- مجموع چند جمله‌ی نخست از دنباله‌ی هندسی $5, 10, 20, \dots$ برابر با ۸۵۵ است؟

- ① ۸ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱۱

۵۰- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این دنباله، صفر است؟

- ① ۱۸ ② ۱۹ ③ ۲۰ ④ ۲۱

۵۱- دنباله‌ی حسابی a_n به صورت $1, 5, 9, \dots$ را در نظر بگیرید. اگر $b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ ($n \geq 1$) باشد، مجموع ۲۰ جمله‌ی اول b_n کدام است؟

- ① ۷۸۰ ② ۷۶۰ ③ ۸۲۰ ④ ۸۴۰

۵۲- در رشته‌ای عددی مجموع شش جمله‌ی اول ۱۱۱ و جمله سوم برابر ۱۵ است. قدرنسبت کدام است؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۵۳- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی جمله‌ی سوم ۱۰ و جمله‌ی هفتم ۴۰ است. جمله‌ی اول کدام است؟

- ① $\sqrt{5}$ ② ۲۵ ③ ۵ ④ $\frac{5}{4}$

۵۴- در دنباله‌ی حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_7 = 5 + \sqrt{2}$ مجموع چهار جمله چهارم چقدر از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است؟

- ① ۸ ② ۶۴ ③ ۱۶ ④ ۳۲

۵۵- حاصل ضرب پنج جمله اول یک دنباله‌ی هندسی برابر $3^1 \times 3^5$ است جمله‌ی سوم کدام است؟

- ① ۳ ② ۶ ③ ۱۲ ④ ۱۸



۵۶- در رشته‌ای $t_1 = 5$ و به ازای $n \geq 1$ ، $t_{n+1} = 4t_n$ ، جمله‌ی n ام این رشته کدام است؟

- ① $n + 4$ ② $3n + 2$ ③ $5 \times 4^{n-1}$ ④ $5 \times 4^{2n-2}$

۵۷- در یک دنباله‌ی حسابی $20 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ ، اگر $t_4 = 3$ باشد آن گاه مقدار t_5 کدام است؟

- ① ۷ ② ۶ ③ ۸ ④ ۵

۵۸- در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی $a_n = 4n - 3$ ، مجموع دوازده جمله‌ی اول کدام است؟

- ① ۳۱۲ ② ۲۷۰ ③ ۲۷۶ ④ ۳۲۰

۵۹- جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۱ و جمله‌ی بیستم آن ۱۴۹ است. مجموع بیست جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

- ① ۱۳۵۰ ② ۱۴۰۰ ③ ۱۴۵۰ ④ ۱۵۰۰

۶۰- شخصی تصمیم دارد یک کتاب ۳۰۰ صفحه‌ای را هر روز به‌طور متوالی نسبت به روز قبل ۲ صفحه بیشتر بخواند. اگر او در روز اول یک صفحه بخواند، در انتهای روز ۱۷ام چند صفحه از کتاب نخوانده باقی می‌ماند؟

- ① ۱۱ ② ۱۷ ③ ۳۳ ④ ۱۴۷



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه $a + c = 2b$ است. همچنین در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید.

$$a_1, 2a_1, a_1 r^2 \Rightarrow a_1 r, 2a_1 r^2, a_1 r^3$$

دنباله حسابی

$$\xrightarrow{\div a_1 r} a_1 r + a_1 r^3 = 2a_1 r^2 \xrightarrow{\div a_1 r} 1 + r^2 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{r^2=A} A^2 - 2A + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} = r^2 \\ A = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} = r^2 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله، صعودی است، جمله هشتم بزرگترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r} = r^6 = (r^2)^3 = (2 + \sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 3 = 11 + 18\sqrt{3}$$

۲ - گزینه ۱

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آنگاه: $b^2 = a \cdot c$ و b واسطه هندسی است.

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 2.5$$

۳ - گزینه ۳ ابتدا مقادیر دنباله را به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ فرض می کنیم. بنابراین جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_{2n} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}$$

وقتی بخواهیم فقط جمع ردیف های فرد را حساب کنیم، باید بدانیم که تعداد جملات نصف می شود و چون یک در میان باید انتخاب کنیم قدر نسبت مربع می شود.

$$\text{جمع جملات مرتبه فرد} = \frac{a_1(1 - (q^2)^n)}{1 - q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} = \frac{2a_1(1 - q^{2n})}{(1 - q)(1 + q)} \Rightarrow \frac{2}{1 + q} = 1 \Rightarrow q = 1$$

۴ - گزینه ۴ نکته: در فرمول S_n هر دنباله حسابی، ضریب پشت n برابر نصف قدرنسبت یعنی $\frac{d}{2}$ است.

$$S_n = An^2 + Bn \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2A$$

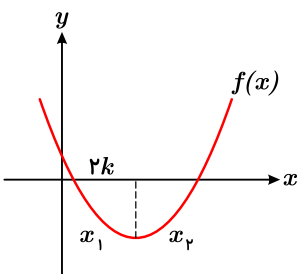
نکته: در هر دنباله حسابی داریم: $a_n - a_{n-1} = d$

$$S_n = 2n^2 + n \Rightarrow \frac{d}{2} = 2 \Rightarrow d = 4$$

$$a_{10}^2 - a_9^2 + a_8^2 - a_7^2 + \dots + a_2^2 - a_1^2 = (a_{10} - a_9)(a_{10} + a_9) + (a_8 - a_7)(a_8 + a_7) + \dots + (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) = d(a_{10} + a_9) + d(a_8 + a_7) + \dots + d(a_2 + a_1) = d(a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + \dots + a_2 + a_1) = dS_{10} = 4S_{10}$$

$$S_{10} = 2 \times 10^2 + 10 = 210 \Rightarrow 4S_{10} = 4 \times 210 = 840$$

۵ - گزینه ۴ فرض کنیم $|OA| = k$ باشد، داریم $|AB| = 2k$.



با توجه به شکل $x_1 = k$ پس:

با توجه به معادله سهمی داریم:

$$\text{طول رأس سهمی} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2} = 6 \Rightarrow \text{طول رأس} = k + 2k = 6 \rightarrow k = 2$$

چون $x_1 = k = 2$ یکی از صفرهای معادله است، پس باید در معادله صدق کند:

$$f(2) = 0 \rightarrow 4 - 24 + m + 8 = 0 \Rightarrow m = 12$$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: اگر n تعداد جملات یک دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a باشد، آنگاه مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot d)$$

کوچک‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد ۱۴ است و بزرگ‌ترین آن عدد $98 = 14 \times 7$ می‌باشد بنابراین تعداد جملات آن:

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{98 - 14}{7} + 1 = 13$$

$$S_n = \frac{13}{2} \cdot (2(14) + 12 \times 7) = 728$$

۷ - گزینه ۱

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_7 = S_{10}$$

$$S_7 = \frac{7}{2} (2a_1 + 6d) = 7(a_1 + 3d), \quad S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) = 5(2a_1 + 9d)$$

$$S_7 = S_{10}$$

$$\rightarrow 10a_1 + 45d = 6a_1 + 15d \Rightarrow 2a_1 + 15d = 0$$

$$S_{16} = \frac{16}{2} (2a_1 + 15d) = 8(0) = 0$$

۸ - گزینه ۱

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

نکته: S_n دنباله حسابی به صورت مقابل است:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نکته: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به صورت مقابل است:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 \times 4 & 2 \times 4 & 3 \times 4 & 4 \times 4 & 5 \times 4 & 6 \times 4 & 7 \times 4 & 8 \times 4 & 9 \times 4 & 10 \times 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 4 & 8, 12, & 16, 20, & 24, & 28, 32, & 36, & 40, & \dots \end{array}$$

دسته ۱ دسته ۲ دسته ۳ دسته ۴

با توجه به دسته‌های فوق شماره آخرین جمله هر دسته برابر است با مجموع اعداد طبیعی از یک تا شماره آن دسته، پس شماره آخرین جمله پانزدهم به صورت زیر است.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 15 = \frac{15 \times 16}{2} = 120 \rightarrow \text{شماره آخرین جمله پانزدهم}$$

$$\text{شماره اولین جمله دسته پانزدهم} = 120 - 15 + 1 = 106$$

$$\begin{array}{ccc} 106 \times 4 & & 120 \times 4 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 424, & \dots, & 480 \end{array}$$

دسته پانزدهم

$$S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2} (424 + 480) = 6780$$

۹ - گزینه ۲

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ می‌باشد. جملات سوم و هفتم را به ترتیب برابر با ۲۰ و ۵۶ قرار می‌دهیم:



$$\begin{cases} a_r = 20 \Rightarrow \\ a_v = 56 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a_1 + rd = 20 \\ a_1 + 6d = 56 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5d = 36 \Rightarrow d = 9 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow a_{10} + a_{20} = a_1 + 9d + a_1 + 19d = 2a_1 + 28d \\ = 2(2) + 28(9) = 256$$

۱۰ - گزینه ۴ دونده ابتدا ۱۰ متر می‌دود تا توپ A را داخل سبد بیندازد.

سپس از سبد به B می‌رود و برمی‌گردد یعنی ۱۲ × ۲ و بعد ۱۴ × ۲ متر می‌دود تا توپ C را داخل سبد بیندازد و به همین ترتیب ادامه می‌دهد.

$$10 + 24 + 28 + 32 + \dots = 710 \Rightarrow 24 + 28 + 32 + \dots = 700$$

سمت چپ دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۴ و جمله‌ی اول ۲۴ می‌باشد.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$700 = \frac{n}{2} [2 \times 24 + (n-1) \times 4] \Rightarrow 700 = n[24 + 2n - 2] \Rightarrow 700 = n(22 + 2n)$$

$$\Rightarrow n^2 + 11n - 350 = 0 \Rightarrow (n + 25)(n - 14) = 0 \Rightarrow n = 14$$

توجه کنید که این ۱۴ توپ از توپ B به بعد می‌باشد و باید توپ A را نیز در نظر بگیریم، پس در کل ۱۵ توپ داخل سبد انداخته است.

$$y = 2x^2 - (m+2)x + m \Leftarrow \text{مجموع ضرایب معادله روبه‌رو صفر است.} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m}{2} \end{cases} \quad \text{۱۱ - گزینه ۴}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = m \quad S = \frac{1}{2} \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |m(m-2)| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \quad y = x^2 - mx + 1 \quad \begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۲ - گزینه ۳

$$S = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$S = \underbrace{10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n}_{10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1}} - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_n$$

$$S = \frac{10}{9} (10^n - 1) - n = \frac{1}{9} (10^{n+1} - 9n - 10)$$

$$\xrightarrow{n=19} S = \frac{1}{9} (10^{20} - 9 \times 19 - 10) = \frac{1}{9} (10^{20} - 181)$$

۱۳ - گزینه ۲

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} * \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_r}, \dots \quad q' = \frac{1}{q}$$

$$s'_n = \frac{\frac{1}{a_1} \left(1 - \left(\frac{1}{q} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{\frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{1}{q^n} \right)}{1 - \frac{1}{q}} \times \frac{q^n}{q^n} = \frac{q^n - 1}{a_1 q^{n-1} (q - 1)} \times \frac{a_1}{a_1}$$

$$\Rightarrow s'_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \times \frac{1}{a_1 a_1 q^{n-1}} \stackrel{*}{=} s_n \times \frac{1}{a_1 a_n} = \frac{s_n}{a_1 a_n}$$

۱۴ - گزینه ۲

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$r, x, \frac{1}{r}, \dots \quad \frac{1}{r} = r \times q^r \rightarrow q^r = \frac{1}{r} \rightarrow q = \pm \frac{1}{r} \xrightarrow{\text{نزولی}} q = \frac{1}{r}$$

$$r, a, 9, b, \dots \quad 9 = r \times q'^r \Rightarrow q'^r = \frac{9}{r} \rightarrow q' = \pm \frac{3}{r} \xrightarrow{\text{صعودی}} q' = \frac{3}{r}$$



$$\frac{S'_{\epsilon}}{S_{\epsilon}} = \frac{\frac{4(q'^{\epsilon} - 1)}{q' - 1}}{\frac{2(q^{\epsilon} - 1)}{q - 1}} = \frac{\frac{4\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\epsilon} - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1}}{\frac{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\epsilon} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}} = \frac{\frac{4\left(\frac{3^{\epsilon}}{2^{\epsilon}} - 1\right)}{\frac{1}{2}}}{\frac{2\left(\frac{1}{2^{\epsilon}} - 1\right)}{\frac{1}{2}}} = \frac{4\left(\frac{3^{\epsilon} - 2^{\epsilon}}{2^{\epsilon}}\right)}{-2\left(\frac{1 - 2^{\epsilon}}{2^{\epsilon}}\right)}$$

$$= \frac{2(3^{\epsilon} - 2^{\epsilon})}{2^{\epsilon} - 1} = \frac{2(729 - 64)}{64 - 1} = \frac{2 \times 665}{63} = \frac{1330}{63} = 21\frac{7}{9}$$

۱۵ - گزینه ۲

سمت چپ معادله، مجموع جملات یک دنباله‌ی عددی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت ۴ می‌باشد. در این صورت x جمله‌ی n ام دنباله است.

$$1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 231 = \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)4)$$

$$\Rightarrow 231 = n + 2n(n-1) \Rightarrow 2n^2 - n - 231 = 0 \Rightarrow \Delta = 1849$$

$$\Rightarrow n_1, n_2 = \frac{1 \pm 43}{4} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 11$$

$$\Rightarrow x = a_{11} = a_1 + 10d = 1 + 10(4) = 41$$

۱۶ - گزینه ۴

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 5050 \Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب ۲ دو عدد متوالی}} = 10100 = \underbrace{100 \times 101}_{\text{ضرب ۲ دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 100$$

۱۷ - گزینه ۴

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + m^2 - 1 = 0$$

با فرض $x^2 = t$ داریم:اگر این معادله دارای دو جواب مختلف‌العلامت یا دارای ریشه مضاعف مثبت باشد، معادله اصلی دارای دو جواب به صورت $x = \pm\sqrt{t}$ خواهد بود.

$$ac < 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(m^2 - 1) = 0$$

$$12 - 4m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$\frac{-b}{2a} > 0 : \text{ برقرار است}$$

پس مجموعه جواب نهایی برای m برابر است با:

$$(-1, 1) \cup \{\pm 2\}$$

واضح است که سه مقدار صحیح ± 2 ، $m = 0$ وجود دارد.۱۸ - گزینه ۴ اگر تعداد جملات $2n$ فرض شود، آنگاه:

$$a_1 + a_r + a_s + \dots + a_{2n-1} = S$$

بدیهی است جملات ردیف فرد، تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت q^r می‌دهد، بنابراین:

$$S = \frac{a_1(1 - (q^r)^n)}{1 - q^r} = \frac{a_1(1 - q^{rn})}{1 - q^r} \quad (1)$$

از طرفی مجموع جملات دنباله هندسی با $2n$ جمله برابر است با:

$$S_{2n} = \frac{a_1(1 - (q)^{2n})}{1 - q} = \frac{a_1(1 - q^{rn})}{1 - q}$$

حال عبارت (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S = \frac{a_1(1 - q^{rn})}{1 - q} \times \frac{1}{1 + q} = S_{2n} \times \frac{1}{1 + q} \Rightarrow S_{2n} = (1 + q)S$$



۱۹ - گزینه ۳ عدد ۱۱۴ بر ۶ بخش پذیر و اولین جمله این دنباله است. جملات ۶ تا ۶ تا بالا می روند تا به ۷۱۴ برسند که آخرین عدد مورد نظر است. پس می توان نوشت:

۷۱۴, ۱۲۰, ۰۰۰, ۱۱۴: جملات دنباله حسابی

۶ = d: قدرنسبت

حال تعداد جملات را به دست می آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 714 = 114 + (n-1)6 \Rightarrow n = \frac{714 - 114}{6} + 1 = 101$$

مجموع جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{101}{2}(114 + 714) = 41814$$

۲۰ - گزینه ۲ اگر قدرنسبت دنباله حسابی d باشد، دنباله جملات ردیف فرد دارای جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ و دنباله جملات ردیف زوج دارای جمله اول a_2 و قدرنسبت $2d$ هستند، پس داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{5}{2}[2a_1 + 4(2d)]$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{5}{2}[2a_2 + 4(2d)]$$

در نتیجه طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{\frac{5}{2}[2a_2 + 4d]}{\frac{5}{2}[2a_1 + 4d]} = 3 \Rightarrow \frac{a_2 + 2d}{a_1 + 2d} = 3 \Rightarrow a_2 + 2d = 3a_1 + 2d$$

$$a_2 = a_1 + d \Rightarrow 2a_1 = -2d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = -1$$

۲۱ - گزینه ۱ مجموع چهار جمله دوم برابر با $S_8 - S_4$ است. پس داریم:

$$S_8 - S_4 = 9S_4 \Rightarrow S_8 = 10S_4 \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 10$$

$$\frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 10 \Rightarrow 1+q^8 = 10 \Rightarrow q^8 = 9 \Rightarrow q^4 = 3 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{\text{جمله های دنباله غیرافزایشی}} q = -\sqrt{3}$$

نکته:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = 1 + q^4$$

۲۲ - گزینه ۳

$$a_2 = 5a_1 \Rightarrow a_1 + 6d = 5(a_1 + 2d) \Rightarrow 4a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_1 = -d$$

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + 2d} = \frac{-d + 4d}{-d + 2d} = \frac{3d}{d} = 3$$

۲۳ - گزینه ۴

$$2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8 \Rightarrow 2a_1 + 3(a_1 + d) - 5(a_1 + 2d) = 8$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 3a_1 + 3d - 5a_1 - 10d = 8 \Rightarrow d = -\frac{8}{7}$$

$$5a_1 - 3a_2 - 2a_3 = 5a_1 - 3(a_1 + d) - 2(a_1 + 2d) = -7d = -7 \times \left(-\frac{8}{7}\right) = 8$$

۲۴ - گزینه ۱

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ابتدا باید جمله ای که صفر می شود را پیدا کنیم چون از آن به بعد جملات مثبت می شوند.



$$a_1 = -27, a_r = -21 \Rightarrow -27 + rd = -21 \Rightarrow rd = 6 \Rightarrow d = 3$$

$$a_n = -27 + (n-1)3 = -30 + 3n = 0 \quad n = 10$$

$$S_n = \frac{n}{2} [ra_1 + (n-1)d]$$

پس $a_{10} = 0$ است و جملات ۱ تا ۹ همان جمله‌های منفی هستند.

$$S_9 = \frac{9}{2} (2(-27) + (9-1)3) = 9(-27 + 12) = -135$$

۲۵ - گزینه ۲

$$\begin{cases} a_1 + a_r + a_r = 12 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Rightarrow a_1 + d = 4 & (1) \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 66 \Rightarrow 3a_1 + (3n-6)d = 66 \Rightarrow a_1 + (n-2)d = 22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 4 \\ a_1 + (n-2)d = 22 \end{cases} \Rightarrow (n-3)d = 18 \quad (2)$$

$$S_n = 117 \Rightarrow \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = 117 \Rightarrow \frac{n}{2} (2(a_1 + d) + (n-3)d) = 117 \xrightarrow{(1), (2)} \frac{n}{2} (2(4) + 18) = 117 \Rightarrow n = 9$$

۲۶ - گزینه ۱ $x = \frac{1-a}{a} = -\frac{c}{a}$ ریشه غیر صفر معادله است. پس ریشه دیگر $x = -1$ است.

$x = -1$ در معادله صدق نمی‌کند.

$$ax^2 + (3a+1)x + a-1 = 0 \xrightarrow{x=-1} a - 3a - 1 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = -2$$

۲۷ - گزینه ۲

$$2(x+5) = (2x-1) + (5x+1) \rightarrow 2x+10 = 7x \rightarrow x = 2$$

$$3, 7, 11, \dots \quad d = 4, \quad a_1 = 3 \rightarrow a_n = 3 + 4(n-1)$$

$$\rightarrow a_n = 4n - 1 \geq 100 \rightarrow n \geq \frac{101}{4} \rightarrow n \geq 26 \rightarrow a_{26} = 3 + 4 \times (26-1) = 103$$

۲۸ - گزینه ۲

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

دنباله هندسی نزولی است بنابراین $0 < q < 1$ می‌باشد.

$$S_r = 16 \Rightarrow \frac{a(1-q^r)}{1-q} = 16 \quad (I)$$

$$\frac{a(1-q^4)}{1-q} = 17 \Rightarrow \frac{a(1-q^4)}{1-q} (1+q^4) = 17 \Rightarrow 1+q^4 = \frac{17}{16} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = +\frac{1}{2} \text{ ق ق}$$

$$q = -\frac{1}{2} \text{ غ ق}$$

۲۹ - گزینه ۴ اگر در جمله m به جای n ، $(3n+1)$ قرار دهیم، جمله $(3n+1)$ ام به دست می‌آید:

$$a_n = 5n - 1 \Rightarrow a_{3n+1} = 5(3n+1) - 1 = 15n + 5 - 1 = 15n + 4 = 15n + x \Rightarrow x = 4$$

۳۰ - گزینه ۲

$$a_{k+1} = a_1 q^k = p$$

$$A = a_1 \times a_r \times a_r \times \dots \times a_{rk+1} = a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 \times \dots \times a_1 q^{rk} = ?$$

$$q \text{ توان} = 1 + 2 + 3 + \dots + rk = \frac{rk(rk+1)}{2} = k(rk+1)$$

$$a_1 \text{ تعداد} = rk + 1$$

$$\Rightarrow A = a_1^{rk+1} \times q^{k(rk+1)} = (a_1 q^k)^{rk+1} = p^{rk+1}$$

۳۱ - گزینه ۴ یک دنباله هندسی با جمله اول x و قدرنسبت x^2 داریم. تعداد جملات این دنباله برابر $8 = \frac{15-1}{2} + 1$ است. حالا مجموع این ۸ جمله را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{x(1-(x^2)^4)}{1-x^2} = \frac{x(1-x^8)}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}(1-(\sqrt{2})^8)}{1-2} = \frac{\sqrt{2}(1-16)}{-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1-256)}{-1} = 255\sqrt{2}$$

نکته: S_n دنباله هندسی به صورت مقابل است:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \times 3^{n-1} \Rightarrow a_n : \frac{1}{4} \times 3^{-1}, \frac{1}{4} \times 3^0, \frac{1}{4} \times 3^1, \dots, a_1 = \frac{1}{12}, q = 3$$

$$S_n > 11 \Rightarrow \frac{\frac{1}{12}(3^n - 1)}{3 - 1} > 11 \Rightarrow \frac{1}{24}(3^n - 1) > 11 \Rightarrow 3^n - 1 > 264 \Rightarrow 3^n > 265 \Rightarrow n \geq 6 \Rightarrow \min(n) = 6$$

نکته: S_n دنباله حسابی به صورت مقابل است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$a_7 + a_{11} = 10 \Rightarrow a_1 + 6d + a_1 + 10d = 10 \Rightarrow 2a_1 + 16d = 10 \quad (1)$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) \xrightarrow{(1)} S_{13} = \frac{13}{2} \times 10 = 65$$

۳۴ - گزینه ۲ ابتدا a_1 و d را به دست می آوریم:

$$S_1 = a_1 = 3(1)^1 - 13(1) = -10$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3(2)^2 - 13(2) = -14 \Rightarrow a_2 = -4 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 6$$

$$a_{74} + a_{18} = 23d + a_1 + 17d + a_1 = 2a_1 + 40d = 220$$

۳۵ - گزینه ۳ راه حل اول: نسبت مجموع چهار جمله اول به مجموع چهار جمله دوم را می نویسیم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{\frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q}}{\frac{a_1 q^4(1 - q^4)}{1 - q}} = \frac{1}{q^4} = 16 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

$$S_8 = 16S_{0-8} \Rightarrow S_8 = 16(S_8 - S_8) = 16S_8 - 16S_8 \Rightarrow 17S_8 = 16S_8$$

$$\Rightarrow 17 \times \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 16 \times \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow 17(q^8 - 1) = 16(q^8 - 1)(q^8 + 1)$$

$$17 = 16(q^8 + 1) \rightarrow q^8 + 1 = \frac{17}{16} \Rightarrow q^8 = \frac{1}{16} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S_{19} - S_{10} = 640 \Rightarrow \frac{a_1(q^{19} - 1)}{q - 1} - \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = 640 \xrightarrow{q=2} \frac{2^{19}a_1 - a_1}{1} - \frac{2^{10}a_1 - a_1}{1} = 640$$

$$\Rightarrow (2^{19} - 2^{10})a_1 = 640 \Rightarrow 2^{10}(2^9 - 1)a_1 = 640 \Rightarrow (2^9 - 1)a_1 = \frac{640}{511} \Rightarrow a_1(2^9 - 1) = \frac{640}{511}$$

$$S_9 = \frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1} \xrightarrow{q=2} \frac{a_1(2^9 - 1)}{2 - 1} = a_1(2^9 - 1) \stackrel{*}{=} \frac{640}{511}$$

۳۷ - گزینه ۲ اگر عرض هر کاشی را x در نظر بگیریم، طول هر کاشی $3x + 2$ می باشد و داریم:

$$\text{مساحت یک کاشی} = x(3x + 2) \Rightarrow 2000x(3x + 2) = 24m^2 = 24 \times (100)^2 cm^2$$

$$\Rightarrow 2000x(3x + 2) = 240000 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 120 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 20)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{20}{3} \text{ غ ق} \\ x = 6 \text{ cm} \Rightarrow \text{طول کاشی} = 3 \times 6 + 2 = 20 \text{ cm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_1 + a_r = 20 \Rightarrow a_1 + a_1 + d = 20 \\ a_{n-1} + a_n = 40 \Rightarrow a_n + a_n - d = 40 \end{cases}$$

$$2(a_1 + a_n) = 60 \rightarrow a_1 + a_n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow 600 = \frac{n}{2} \times 30 \rightarrow n = 40$$

راه دوم:

$$\frac{\text{مجموع } k \text{ جمله آخر} + \text{مجموع } k \text{ جمله اول}}{k} = a_1 + a_n$$

$$\frac{20 + 40}{2} = a_1 + a_n \Rightarrow a_1 + a_n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow 600 = \frac{n}{2}(30) \rightarrow n = 40$$

۳۹ - گزینه ۲

راه حل اول:

$$\begin{cases} a_r = a + 6 \\ a_v = a + 14 \\ a_{10} = a + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = a + 6 \\ t_v = a + 14 \\ t_r = a + 20 \end{cases}$$

$$\rightarrow t_1 \times t_r = t_v^2 \Rightarrow (a + 6)(a + 20) = (a + 14)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 26a + 120 = a^2 + 28a + 196 \Rightarrow 2a = -76 \Rightarrow a = -38 \Rightarrow a_n = -38 + 2n \Rightarrow a_1 = -36$$

راه حل دوم: نکته: اگر جملات m ام، n ام و k ام دنباله‌ی حسابی به ترتیب جملات متوالی دنباله‌ی هندسی باشد، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی برابر $q = \frac{k-m}{m-n}$ است.

$$q = \frac{10-7}{7-3} = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{t_r}{t_1} = \frac{a_v}{a_r} = \frac{a+14}{a+6} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4a + 56 = 3a + 18$$

$$\Rightarrow a = -38 \Rightarrow a_n = -38 + 2n \Rightarrow a_1 = -36$$

۴۰ - گزینه ۴

در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n و قدر نسبت q داریم: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\frac{1}{2}, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, 4 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \times q^6 \Rightarrow q^6 = 8 = 2^3 \rightarrow q = \pm \sqrt[6]{2}$$

$$a_5 = aq^4 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

۴۱ - گزینه ۳

$$\frac{a_r + a_s}{a_5 + a_7} = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{aq^r + aq^s}{aq^5 + aq^7} = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{aq^r(q+1)}{aq^5(q+1)} = \frac{9}{2} \rightarrow q^r = \frac{9}{2} \rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

توجه کنیم چون جملات دنباله‌ی مثبت است پس $(q > 0)$ است.

$$a_r = a \times q = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3}a = 2 \rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

۴۲ - گزینه ۳ گزینه‌ی ۱ درست است زیرا یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q^2 است:

$$a, aq, aq^2, \dots \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2, a^2q^2, a^2q^4, \dots$$

گزینه‌ی ۲ درست است زیرا یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q است:

$$a, aq, aq^2, \dots \xrightarrow{\times k} ak, akq, akq^2, \dots$$

گزینه‌ی ۳ نادرست است زیرا مطابق مقادیر نوشته شده فوق:

$$a, aq, aq^2, \dots \xrightarrow{+k} (a+k), (aq+k), (aq^2+k), \dots$$

$$\frac{a_r}{a_1} \neq \frac{a_s}{a_r}$$

گزینه‌ی ۴ درست است زیرا یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $(q+k)$ است.

$$a, aq, aq^2, \dots \rightarrow a, a(q+k), a(q+k)^2, \dots$$



۴۳ - گزینه ۱

در دنباله‌ی هندسی نزولی $1 < q < 0$ است، حال چون دنباله غیر نزولی است پس $q \notin (0, 1)$

$$a^r = 1 \times 4 \rightarrow a^r = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ چون دنباله غیر نزولی است} \\ a = -2 \text{ ق ق} \end{cases} \rightarrow q = \frac{a}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{4(1 - (\frac{-1}{2})^n)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{8}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) = \frac{21}{8}$$

$$\Rightarrow 1 - (-\frac{1}{2})^n = \frac{63}{64} \Rightarrow -(-\frac{1}{2})^n = -\frac{1}{64} \Rightarrow (-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{64} \Rightarrow n = 6$$

۴۴ - گزینه ۴

می‌دانیم در هر دنباله‌ی حسابی $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ می‌باشد.

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{\frac{4}{2}(2a_1 + 3d)}{\frac{2}{2}(2a_1 + d)} = \frac{49}{9} \Rightarrow \frac{2a_1 + 3d}{2a_1 + d} = \frac{49}{9} \Rightarrow \frac{a_1 + 3d}{a_1 + d} = \frac{49}{9}$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 3d = 49a_1 + 49d \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 + 3d}{a_1 + d} \stackrel{d=2a_1}{=} \frac{a_1 + 6(2a_1)}{a_1 + 2(2a_1)} = \frac{13a_1}{5a_1} = \frac{13}{5}$$

۴۵ - گزینه ۲

$$d = a_r - a_1 = \overbrace{104 - 91}^{-91 - (-104)} = 13$$

$$a_n = -104 + (n-1)13 = 13n - 117$$

$$a_n = 0 \Rightarrow 13n - 117 = 0 \Rightarrow n = 9$$

۴۶ - گزینه ۴ ابتدا معادله‌ی $0 = x - 3\sqrt{x} + 2$ را حل می‌کنیم. با فرض $\sqrt{x} = t$ داریم:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی جدید باید $\alpha = 2$ و $\beta = 8$ باشد، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S = \alpha + \beta = 2 + 8 = 10$$

$$P = \alpha\beta = 2 \times 8 = 16$$

با داشتن مجموع (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) می‌توان معادله را به صورت $0 = x^2 - Sx + P$ نوشت.

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

۴۷ - گزینه ۴ مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + dn - d)$$

$$= a_1n + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2} \Rightarrow S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

 S_n بر حسب n از درجه‌ی دوم است، پس ضریب درجه‌ی ۳ باید صفر شود یعنی $p = -2$ بنابراین:

$$S_n = 2n^2 + 2n$$

هم‌چنین ضریب n^2 برابر $\frac{d}{2}$ است، یعنی $\frac{d}{2} = 2$ بنابراین $d = 4$.

۴۸ - گزینه ۳

این دنباله‌ی هندسی است زیرا n روی توان قرار دارد.

$$a_n = 2^{n-1} \rightarrow a_1 = 2^0 = 1 \rightarrow a_2 = 2 \rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 2$$



$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = 255 \rightarrow \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

۴۹ - گزینه ۲

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$a_1 = 5, q = -2 \rightarrow S_n = \frac{5((-2)^n - 1)}{-2 - 1} = 855 \rightarrow (-2)^n - 1 = -513$$

$$(-2)^n = -512 \rightarrow n = 9$$

۵۰ - گزینه ۴ جمله ی هفتم، نصف جمله ی سوم است، پس:

$$a_7 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d) \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

باید $S_n = 0$ باشد، $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ، پس:

$$\frac{n}{2}(2(-10d) + (n-1)d) = 0 \Rightarrow -20d + nd - d = 0 \Rightarrow -21d = -nd \Rightarrow n = 21$$

روش دوم:

$$a_7 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{1}{2}(a_1 + 2d) \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 + 10d = 0 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 0$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = 0$$

۵۱ - گزینه ۳

$$b_1 = \frac{a_1 + a_7}{2} = 3, b_7 = \frac{a_7 + a_{13}}{2} = 7$$

$$3, 7, 11, \dots \Rightarrow d = 4, a_1 = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 3 + 19 \times 4) = 820$$

۵۲ - گزینه ۳

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a + 5d) = 111 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 5d = 34 \\ a + 2d = 15 \end{cases} \rightarrow a = 1, d = 7$$

$$a_7 = a + 2d = 15$$

۵۳ - گزینه ۳

دنباله ی هندسی وقتی صعودی است که $q > 1$ باشد.

$$a_7 = a_7 q^r \Rightarrow 40 = 10q^r \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$a_7 = a_1 q^r \Rightarrow 10 = a_1 \times 2 \Rightarrow a_1 = 5$$

۵۴ - گزینه ۲

در یک دنباله ی حسابی برای دو جمله ی دلخواه a_m و a_n داریم: $a_m - a_n = (m - n)d$

$$(a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{16}) - (a_5 + a_8 + a_9 + a_4) = (a_{13} - a_5) + (a_{17} - a_8) + (a_{19} - a_9) + (a_{16} - a_4) = 8d + 8d + 8d + 8d = 32d = 32(a_7 - a_1) = 64$$

گزینه ۴ - ۵۵

$$a_1 \cdot a_7 \cdot a_7 \cdot a_7 \cdot a_7 = 2^5 \times 3^{10} \Rightarrow a_1 \cdot a_1 q^6 \cdot a_1 q^6 \cdot a_1 q^6 \cdot a_1 q^6 = 2^5 \times 3^{10}$$

$$\Rightarrow a_1^5 \times q^{24} = 2^5 \times 3^{10} \Rightarrow (a_1 q^6)^5 = (2 \times 3^2)^5$$

$$a_1 q^6 = 2 \times 3^2 \rightarrow a_7 = a_1 q^6 = 18$$

۵۶ - گزینه ۳

$$t_{n+1} = 4t_n \Rightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n} = 4$$

چون نسبت دو جمله ی متوالی مقدار ثابتی است پس دنباله ی هندسی است که در آن $t_1 = 5$ و $q = 4$ می باشد. بنابراین:



$$t_n = t_1 q^{n-1} = 5 \times 2^{n-1}$$

گزینه ۱ - ۵۷

$$t_1 + t_r + t_v + t_k = 20 \Rightarrow t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 7d) = 20$$

$$\Rightarrow 4t_1 + 14d = 20 \Rightarrow 2t_1 + 7d = 10$$

$$t_r = 3$$

حل دستگاه

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 7d = 10 \\ 2t_1 + 7d = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ t_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow t_5 = t_1 + 4d = -9 + 4(4) = 7$$

گزینه ۳ - ۵۸ می‌دانیم مجموع n جمله اول دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

طبق فرمول فوق، ابتدا جمله اول و جمله دوازدهم را می‌یابیم:

$$a_n = 4n - 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 3 = 1 \\ a_{12} = 4 \times 12 - 3 = 45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = 6(1 + 45) = 6 \times 46 = 276$$

گزینه ۴ - ۵۹

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{r_0} = 149 \end{cases} \xrightarrow{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} S_{r_0} = \frac{r_0}{2}(1 + 149) = 1500$$

گزینه ۱ - ۶۰

$$1, 3, 5, 7, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}(2(1) + (17-1)(2)) = 289$$

یعنی پس از ۱۷ روز ۲۸۹ صفحه از کتاب را خوانده است، بنابراین ۱۱ صفحه باقی می‌ماند.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۱۰ - ۴	۱۹ - ۳	۲۸ - ۲	۳۷ - ۲	۴۶ - ۴	۵۵ - ۴
۲ - ۱	۱۱ - ۴	۲۰ - ۲	۲۹ - ۴	۳۸ - ۳	۴۷ - ۴	۵۶ - ۳
۳ - ۳	۱۲ - ۳	۲۱ - ۱	۳۰ - ۲	۳۹ - ۲	۴۸ - ۳	۵۷ - ۱
۴ - ۴	۱۳ - ۲	۲۲ - ۳	۳۱ - ۴	۴۰ - ۴	۴۹ - ۲	۵۸ - ۳
۵ - ۴	۱۴ - ۲	۲۳ - ۴	۳۲ - ۲	۴۱ - ۳	۵۰ - ۴	۵۹ - ۴
۶ - ۲	۱۵ - ۲	۲۴ - ۱	۳۳ - ۲	۴۲ - ۳	۵۱ - ۳	۶۰ - ۱
۷ - ۱	۱۶ - ۴	۲۵ - ۲	۳۴ - ۲	۴۳ - ۱	۵۲ - ۳	
۸ - ۱	۱۷ - ۴	۲۶ - ۱	۳۵ - ۳	۴۴ - ۴	۵۳ - ۳	
۹ - ۲	۱۸ - ۴	۲۷ - ۲	۳۶ - ۴	۴۵ - ۲	۵۴ - ۲	